ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 6

3.3 Описание дискретных сигналов

Мы уже рассматривали понятия дискретного и цифрового сигналов. Напомним, дискретизация по времени представляет собой процедуру взятия мгновенных значений (отчетов) аналогового сигнала с интервалом времени, равным периоду Т. Значения отчетов $x(nT)$ совпадают со значениями сигнала в моменты $t = nT$, то есть $x(nT) = x(t)_{t=nT}$. Совокупность отчетов $x(nT)$, $n = 0,1,...$ называется дискретным сигналом, или решетчатой функцией. Итак: *Функция, определенная в дискретные моменты времени, называется дискретным сигналом, или решетчатой функцией.*

Мы будем опускать множитель T в записи дискретного сигнала, то есть будем этот сигнал записывать, как $x(n)$, имея при этом в виду, что это значение x в момент времени nT . Если дискретный сигнал представлен в виде числа определенной разрядности, то такой сигнал называется цифровым. Это иллюстрируется рисунком 3.4.

Цифровой сигнал соответствует дискретному с погрешностью не более величины своего младшего разряда. Однако в современных микропроцессорных устройствах при вычислениях длина слова составляет 16 двоичных разрядов и более, количество разрядов АЦП составляет 12 и более (какая при этом ошибка? $1/(2^{12})=1/4096$, что составляет 0,025%), поэтому эффекты квантования по уровню незаметны, и дискретизацию по амплитуде можно не учитывать.

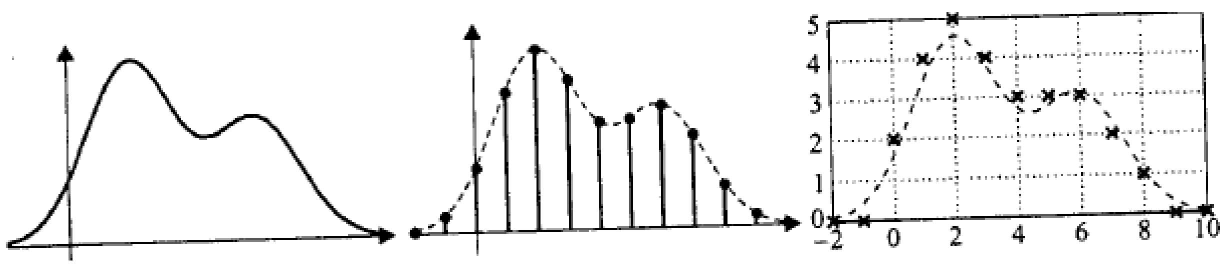

Рисунок 3.4 – Аналоговый (слева), дискретный (в центре) и цифровой (справа) сигналы

Мы будем считать, что количество разрядов достаточно велико и цифровой сигнал соответствует дискретному сигналу с достаточной точностью. Поэтому мы не будем делать различия между дискретным и цифровым сигналом. Если разрядность АЦП все-таки мала, то возникает потребность учесть погрешности, связанные с квантованием по уровню. Это делается с привлечением теории вероятностей, считая погрешность от квантования по уровню случайной величиной.

Рассмотрим некоторые типовые дискретные сигналы.

3.3.1 Некоторые типовые дискретные сигналы

1) Единичная импульсная функция, или просто единичный импульс. Она является в некоторой степени аналогом дельта-функции. Единичная импульсная функция представляет собой одиночный отчет с единичным значением

$$x_0(k) = \begin{cases} 1, \ldots k = 0 \\ 0, \ldots k \neq 0 \end{cases}. \tag{3.27}$$

Как видно, здесь уже нет предельных переходов, и эта функция более понятна по сравнению с дельта-функцией, хотя также физически не реализуема (идеальные скачки реализовать нельзя). Единичная импульсная функция также обладает фильтрующим свойством, но уже по отношению к сумме. Здесь это свойство очевидно: в сумме остается только одно слагаемое, соответствующее $k = 0$.

2) Единичный скачек. Он соответствует аналоговому единичному скачку

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k \prec 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases}. \tag{3.28}$$

3) Дискретная экспоненциальная функция. Она определяется следующим образом

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k \prec 0 \\ a^k, & k \geq 0 \end{cases}. \tag{3.29}$$

Почему экспонента? Ведь здесь нет «*e*». Но (Тюкин, ч. 2, с.7) $e^{\alpha kT} = \left(e^{\alpha T}\right)^k = a^k$, где $a = e^{\alpha T}$. Это может служить объяснением названию.

Другие типовые дискретные сигналы также, как и единичный скачек, получаются из соответствующих аналоговых сигналов путем их дискретизации.

3.3.2 Спектр дискретного сигнала

Для определения спектра мы используем преобразование Фурье. Но преобразование Фурье позволяет вычислить спектр, если сигнал представлен в виде *функции непрерывного времени*. Дискретный же сигнал является последовательностью чисел, а это – не функция непрерывного времени. Но у нас есть очень удобная функция для представления импульсов – это дельта-функция. Тогда дискретный сигнал может быть представлен, как непрерывный сигнал в виде суммы задержанных во времени дельта-функций с амплитудами, равными непрерывному сигналу в моменты дискретизации

$$x_д(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(t - kT) . \tag{3.30}$$

Такое представление показано на рисунке 3.5. Таким образом, в (3.30) решетчатая функция представлена, как непрерывная функция времени.

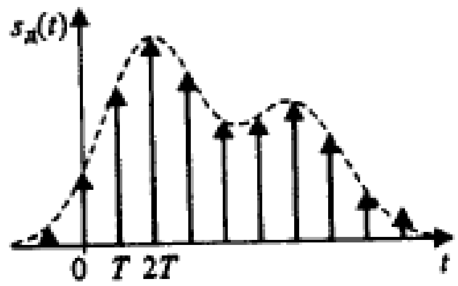

Рисунок 3.5 – Представление дискретного сигнала в виде последовательности взвешенных дельта-функций

Производим преобразование Фурье (3.30), как непрерывной функции

$$\dot{S}_{\partial}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(t-kT)\right)\cdot e^{-j\omega t}dt=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)\int\limits_{0}^{\infty}\delta(t-kT)e^{-j\omega t}dt\ .$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции, получаем, что интеграл в правой части равен $e^{-j\omega kT}$, то есть в итоге получаем спектр дискретного сигнала

$$\dot{S}_{\partial}(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)e^{-j\omega kT}\ . \qquad (3.31)$$

Согласно теореме Эйлера $e^{jx}=\cos x+j\sin x$, поэтому функция $e^{-j\omega kT}$ периодическая, следовательно, спектр любого дискретного сигнала является периодическим с периодом *T* и частотой повторения $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T}$, то есть

$$\dot{S}_{\partial}(\omega)=\dot{S}_{\partial}(\omega+\frac{2\pi}{T}k).$$

Теперь выясним, как спектр дискретного сигнала $\dot{S}_{\partial}(\omega)$ связан со спектром аналогового сигнала $\dot{S}(\omega)$. Поскольку дельта-функция равна нулю всюду, кроме момента $t-kT$, то дискретный сигнал в правой части (3.30) можно вынести за знак суммы и заменить его непрерывным сигналом *x(t).*

$$x_{\partial}(t)=x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\ . \qquad (3.32)$$

Под знаком суммы в (3.32) у нас сдвинутые во времени, то есть периодически повторяющиеся, дельта-функции, поэтому эта сумма является периодическим сигналом. Представим эту сумму в виде комплексного ряда Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\omega_k t}\ . \qquad (3.33)$$

В (3.33) коэффициенты ряда равны 1/Т. Действительно

$$\dot{A}_k=\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-j\omega_k t}dt=\frac{1}{T}\ . \qquad (3.34)$$

где $\omega_k=\dfrac{2\pi k}{T}$. В (3.34) учтено, что в интервал (–Т/2; Т/2) попадает только одна дельта-функция.

Подставив (3.33) в (3.32), получим

$$x_{\partial}(t)=\frac{x(t)}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\omega_k t}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t)e^{j\omega_k t}\ . \qquad (3.35)$$

Формула (3.35) выражает зависимость дискретного сигнала $x_{\partial}(t)$ от непрерывного $x(t)$. Выполняя преобразование Фурье, найдем спектр левой и правой частей (3.35). Известно, что умножение на экспоненту $e^{j\omega_k t}$ соответствует сдвигу спектральной функции на ω_k, поэтому можно записать

$$\dot{S}_{\partial}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{S}(\omega+\omega_k) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{S}(\omega+\frac{2\pi k}{T}) \ . \qquad (3.36)$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала представляет собой бесконечный ряд сдвинутых копий спектра исходного сигнала. Это показано на рисунке 3.6. Расстояние между соседними копиями спектра равно частоте дискретизации $\omega_{\partial} = 2\pi / T$

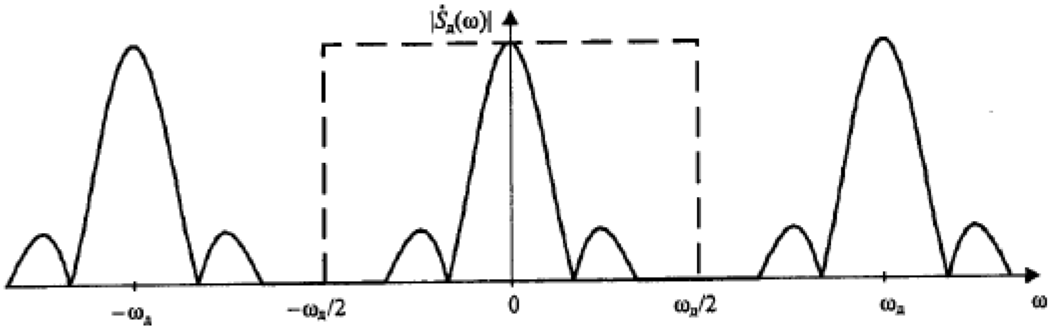

Рисунок 3.6 – Спектр дискретного сигнала

Итак: *спектр дискретного сигнала представляет собой бесконечный ряд сдвинутых копий спектра исходного сигнала. Расстояние между соседними копиями спектра равно частоте дискретизации* $\omega_{\partial} = 2\pi / T$.